1. *Ответ.* 1,5 км.

Первое решение. Если мальчик отъедет от остановки не более чем на 500 м, то он успеет вернуться к приезду автобуса, который за это время проедет до остановки не более 1500 м. Если мальчик отъедет от остановки на расстояние, большее 500 м, то вернуться на неё до приезда автобуса он уже не успеет, значит, чтобы не упустить автобус, он должен продолжить движение до следующей остановки. Если мальчик заметит автобус, когда до второй остановки останется не более 1 км, то он сможет продолжить движение и оказаться на остановке не позднее автобуса, который за это время проедет не более 3 км. Таким образом, наибольшее расстоянии между остановками, при котором мальчик гарантированно не упустит автобус, равно 1,5 км.

Второе решение. Если мальчик с того момента, как он заметил автобус, проехал расстояние x, то автобус проехал расстояние $3x$. Предположим, что мальчик поехал навстречу автобусу и приехал на остановку одновременно с автобусом, тогда $3x + x = 2$, следовательно, мальчик проехал 0,5 км до остановки, поэтому если расстояние до этой остановки будет больше 0,5 км, то мальчик на неё не успеет. Если он продолжил ехать в том же направлении, что ехал изначально, и приехал на остановку одновременно с автобусом, то $3x - x = 2$, следовательно, мальчик проехал 1 км, поэтому если расстояние до этой остановки будет больше 1 км, то мальчик на неё не успеет. Таким образом расстояние между остановками не должно превышать 1,5 км.

2. *Ответ.* x — любое целое неотрицательное число.

Решение. Правая часть уравнения имеет смысл при $\pi^x \geqslant 1$. Пусть $10^n \leqslant \pi^x < 10^{n+1}$, где n — неотрицательное целое число. Тогда $[\lg \pi^x] = n$. Но поскольку также имеем $10^n \leqslant [\pi^x] < 10^{n+1}$, получаем $[\lg[\pi^x]] = n$. Следовательно, при $\pi^x \geqslant 1$ правая часть уравнения тождественно равна нулю. Значит, решениями будут все неотрицательные целые значения x.

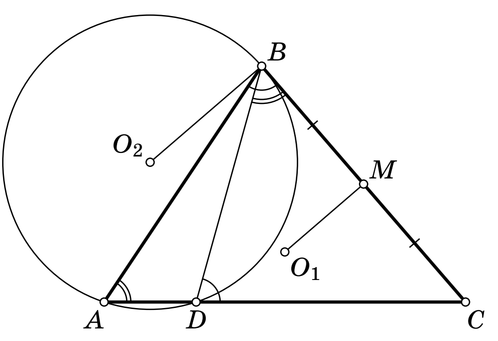
3. *Ответ.* 7.

Решение. Рассмотрим произвольную расстановку чашек и выпишем в строчку их цвета. Под этой строчкой выпишем также все её различные циклические сдвиги — всего 14 штук. Подсчитаем, сколько всего будет совпадений по цвету на одной и той же позиции в исходной расстановке и в расстановках, полученных сдвигами. Для чёрных чашек совпадения по цвету будут ровно в 6 сдвигах, а для белых — в 7 сдвигах. Следовательно, всего совпадений по цветам для 14 сдвигов будет $7 \cdot 6 + 8 \cdot 7 = 98$. Значит, существует сдвиг, в котором будет не более $98/14 = 7$ совпадений с исходной расстановкой.

Рассмотрим такую расстановку чашек: ббббчбчббччбччч. Непосредственной проверкой можно убедиться, что все её циклические сдвиги имеют с ней ровно 7 совпадений.

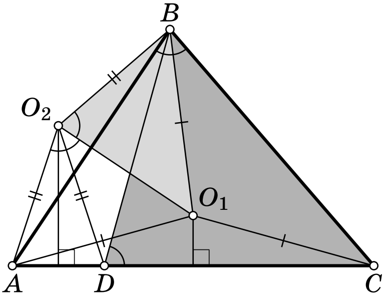
4. *Ответ.* 1/2.

Первое решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD соответственно, а M — середина стороны BC. Треугольники ABC и BDC подобны, так как у них угол C общий, а два других угла равны по условию. Поэтому оставшиеся углы этих треугольников BAC и DBC также равны (см. рис.). Это означает, что описанная окружность треугольника ABD касается прямой BC, а радиус O_2B перпендикулярен касательной BC. Кро-



ме того, O_1 лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC. Поэтому отрезок MB длины $1/2$ является ортогональной проекцией отрезка O_1O_2 на прямую BC. Но проекция не длиннее отрезка, поэтому $|O_1O_2| \geqslant 1/2$, причём равенство достигается, когда угол ABC равен 90°, так как в этом случае O_1 — середина стороны AC, а O_2 — середина стороны AB, O_1O_2 — средняя линия треугольника ABC.

Второе решение. Рассмотрим случай, когда треугольник ABC остроугольный, см. рис. (остальные случаи разбираются аналогично).



По теореме о касательной и секущей $AC \cdot DC = 1$. Далее, $\angle BO_1C = 2\angle BAC = \angle BO_2D$, следовательно, подобны равнобедренные треугольники DBO_2 и CBO_1, поэтому равны углы при их основаниях. Поскольку O_1O_2 — серединный перпендикуляр отрезка AB, получаем

$$\angle O_1O_2B = \frac{1}{2}\angle AO_2B = \frac{1}{2}(360^\circ - 2\angle ADB) = \\ = 180^\circ - \angle ADB = \angle BDC.$$

Кроме того,

$$\angle O_2BO_1 = \angle O_2BD + \angle DBO_1 = \angle O_1BC + \angle DBO_1 = \angle DBC,$$

следовательно, треугольники O_2O_1B и DBC подобны. Из подобия получаем

$$O_2O_1 = \frac{DC \cdot BO_1}{BC} = DC \cdot BO_1 = \frac{DC}{2} \cdot 2BO_1 = \frac{DC}{2}(AO_1 + O_1C) \geqslant \\ \geqslant \frac{DC \cdot AC}{2} = \frac{1}{2},$$

причём неравенство обращается в равенство, когда точка O_1 лежит на отрезке AC, т. е. треугольник ABC прямоугольный.

5. *Первое решение.* Сначала покажем, что расстояние до ближайшего целого числа от числа вида $c - mq$ (где $m \in \in \mathbb{N}$, q — иррациональное и c — любое фиксированное число) можно выбором m сделать сколь угодно малым. Рассмотрим $n+1$ чисел q, $2q$, $3q$, ..., $(n+1)q$. Их дробные части попадают в один из n промежутков

$$\left(0; \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right), \ldots, \left(\frac{n-1}{n}; 1\right).$$

Тогда по принципу Дирихле найдутся два числа m_1q и m_2q $(m_2 > m_1)$, дробные доли которых попали в один и тот же промежуток. Их разность $(m_2q - m_1q) = (m_2 - m_1)q$ также является числом вида mq, причём, поскольку разность их дробных частей по модулю меньше $1/n$, для некоторого целого N верно неравенство

$$N - \frac{1}{n} < (m_2 - m_1)q < N + \frac{1}{n}.$$

Следовательно, существует такое число $\psi \in \left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$, что $(m_2 - m_1)q = N + \psi$. Выберем натуральное число l так, что выполняется одно из двойных неравенств $l\psi \leqslant \{c\} < (l+1)\psi$ или $-(l+1)\psi < \{c\} \leqslant -l\psi$. Тогда найдётся такое целое число K, что $|(N+\psi)l - (K+c)| < 1/n$, т. е.

$$|l(m_2 - m_1)q - (K+c)| < \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$-K - \frac{1}{n} < c - mq < -K + \frac{1}{n},$$

где $m = l(m_2 - m_1) \in \mathbb{N}$. Значит, расстояние от целого числа $-K$ до числа $c - mq$ меньше $1/n$. Увеличивая значение n, можно сделать это расстояние сколь угодно малым.

Без ограничения общности будем считать, что $b > a$. При преобразовании подобия прямой с коэффициентом $1/a$ точка $-a$ перейдёт в точку -1, а точка b — в точку $b/a > 1$. Кузнечик теперь будет прыгать на 1 вправо и на $q = b/a$ влево. В некоторый момент кузнечик пересечёт середину отрезка $[-1; q]$ прыжком на 1 вправо и попадёт в некоторую точку c. После этого кузнечик никогда не будет делать прыжки длины q более одного раза подряд. При прыжке на 1 дробные доли точек, в которых кузнечик находился до и после прыжка, одинаковые.

Пусть кузнечик находится в точке c. Выберем такое натуральное число m, что расстояние от $c - mq$ до ближайшего целого меньше $10^{-6}/a$. Если кузнечик сделает m прыжков влево, он будет находиться на расстоянии менее $10^{-6}/a$ от какого-то целого числа, независимо от того, сколько при этом он совершил прыжков вправо на 1. Поскольку точка 0 находится левее середины нашего отрезка, то, прыгая на 1 вправо, кузнечик обязательно окажется на расстоянии менее $10^{-6}/a$ от точки 0, а на исходной прямой — на расстоянии, меньшем 10^{-6} от точки 0.

Второе решение. Независимо от своего начального положения x_0 кузнечик рано или поздно окажется на промежутке $\Delta = \left[-\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$. Действительно, если $x_0 < \frac{b-a}{2}$, то он будет прыгать вправо на a, пока не перепрыгнет точку $\frac{b-a}{2}$ и не окажется на промежутке $\Delta_r = \left[\frac{b-a}{2}; \frac{a+b}{2}\right) \subset \Delta$, а если $x_0 \geqslant \frac{b-a}{2}$, то он будет прыгать влево на b, пока не перепрыгнет точку $\frac{b-a}{2}$ и не окажется на промежутке $\Delta_l = \left[-\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right) \subset \Delta$.

При дальнейших прыжках кузнечик уже не покинет промежутка Δ: оказавшись на Δ_r, он прыгает влево на b и попадает на Δ_l, а оказавшись на Δ_l, он прыгает вправо на a и попадает на Δ_r.

Если склеить промежуток Δ в окружность той же длины $a+b$, то указанные прыжки кузнечика на этой окружности будут уже прыжками в одну сторону на a (или в другую сторону на b, что на данной окружности — одно и то же).

Поскольку отношение прыжка a к длине $a+b$ окружности иррационально, следы кузнечика будут всюду плотны на окружности, то есть рано или поздно кузнечик попадёт на всякую дугу окружности. Следовательно, и на исходном промежутке Δ следы кузнечика всюду плотны, так что рано или поздно он попадёт в любую наперед заданную окрестность нуля.